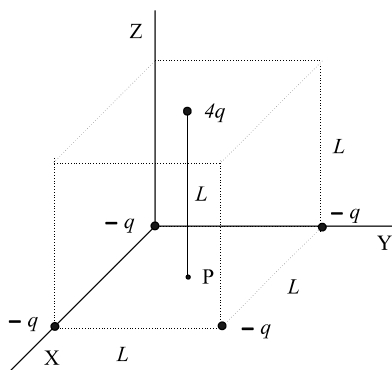


**FÍSICA (Informática de Gestión)**  
**1ª Prueba Presencial, 1ª Semana**  
**Febrero de 2005**  
**SOLUCIONES**

**PROBLEMA 1.1.1**

Tenemos una distribución de cargas puntuales dispuestas como muestra la figura P1.1.1; cuatro cargas  $-q$  sobre los vértices de un cuadrado de lado  $L$  en el plano XY y una carga  $4q$  situada en el punto  $(L/2, L/2, L)$ . Calcular el campo y potencial electrostático en el punto P  $(L/2, L/2, 0)$ .



**Figura P1.1.1**

**Solución**

a) Campo en el punto P  $(L/2, L/2, 0)$

El campo debido a las cargas en el plano XY es nulo porque el campo en el punto P se compensa dos a dos. Queda sólo la contribución al campo debido a la carga  $4q$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q}{L^2} (-\mathbf{u}_z)$$

b) El potencial electrostático viene dado por

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Teniendo en cuenta que las cargas situadas en el plano XY se encuentran a una distancia de  $L\sqrt{2}/2$  al punto P, y que la carga  $4q$  esta a una distancia  $L$  de P, tenemos

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{4(-q)}{L\sqrt{2}/2} + \frac{4q}{L} \right]$$

Operando

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} [1 - \sqrt{2}]$$

### PROBLEMA 1.1.2

En la figura P1.1.2 se muestra un circuito de corriente continua (c. c.). Calcular el circuito equivalente Thévenin correspondiente al citado circuito, visto desde los terminales A-B.

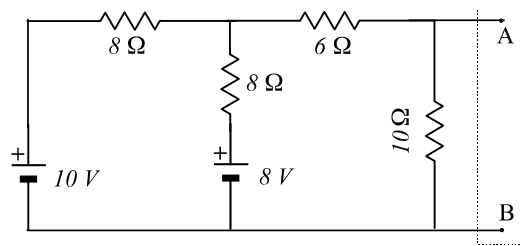


Figura P1.1.2

### Solución

El sistema de ecuaciones del circuito, suponiendo que las corrientes van en el sentido de las agujas del reloj, es

$$\begin{aligned} 10 - 8 &= 16I_1 - 8I_2 \\ 8 &= -8I_1 + 24I_2 \end{aligned}$$

Simplificando el sistema

$$\begin{aligned} 1 &= 8I_1 - 4I_2 \\ 1 &= -I_1 + 3I_2 \end{aligned}$$

Resolviendo por Cramer

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{7}{20} \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{9}{20} \text{ A}$$

Puesto que  $I_2$  resulta positiva, el sentido de la corriente coincide con el supuesto.

La tensión tThèvenin viene dada por la diferencia de pontencial entre A y V

$$E_{th} = V_{AB} = 10\Omega \cdot I_2 = 10 \times \frac{9}{20} = 4,5 \text{ V}$$

La resistencia thèvenin se obtiene cortocircuitando la fuentes y calculando la resistencia equivalente que se ve desde los terminales A-B

Tenemos dos resistencias en paralelo de 8 ohmios

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$$

Luego

$$R_1 = 4 \Omega$$

La resistencia resultante,  $R_1$ , está en serie con una resistencia de 6 ohmios

$$R_2 = R_1 + 6 = 10 \Omega$$

Y por último, la resistencia resultante,  $R_2$ , está en paralelo con la resistencia de 10  $\Omega$

$$\frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

Luego la resistencia Thèvenin del circuito es

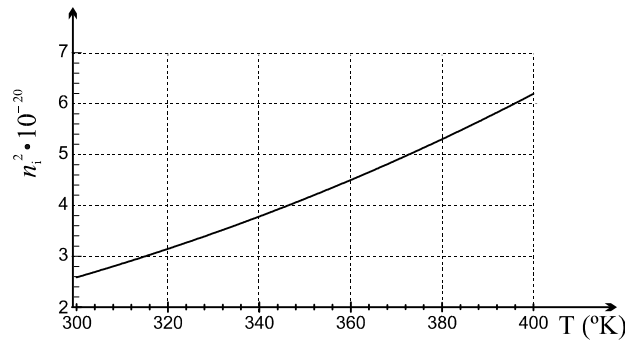
$$R_{th} = 5\Omega$$

### PROBLEMA 1.1.3

Tenemos una muestra de Si intrínseco a 27°C cuya densidad de portadores intrínseca es  $n_i = 1,61 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ . La densidad de portadores intrínsecos de un semiconductor es una magnitud que depende de la temperatura en la forma  $n_i^2 \propto T^3 e^{-W_g/kT}$ , cuya gráfica, para el silicio, está representada en la figura P.1.1.3.

Si consideramos que en este rango de temperaturas, las movilidades de electrones y huecos se mantienen prácticamente constantes, determinar a qué temperatura debemos calentar la muestra de Si para que su conductividad aumente un 40%.

Datos:  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ;  $\mu_n = 1500 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ;  $\mu_p = 475 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$



**Figura P1.1.3**

### Solución

La conductividad del Si viene dada por

$$\gamma = n_i q (\mu_e + \mu_p)$$

Es decir, si consideramos que las movilidades de electrones y huecos se mantienen constantes con la temperatura ( $\mu_e$  y  $\mu_p$ ), la conductividad depende linealmente de la densidad de portadores  $n_i$ . Por tanto, para que la conductividad aumente un 40% es necesario que la densidad de portadores intrínseca lo haga también en la misma proporción.

Si llamamos  $n_1$  a la densidad de portadores a 27°C. La nueva densidad de portadores para que la conductividad aumente un 40% debe ser

$$n_2 = 1,4 n_1$$

Es decir

$$n_2 = 1,4 \times 1,61 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$$

$$n_2 = 2,2541 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$$

Y la densidad de portadores al cuadrado valdrá

$$n_2^2 = 5,08 \times 10^{20}$$

Llevando a la gráfica P1.1.3 esta cantidad, obtenemos la temperatura correspondiente

$$T_2 = 374^\circ \text{ K}$$

que corresponden a  $101^\circ\text{C}$ . Luego esta es la temperatura a la que debemos elevar la muestra para que su conductividad aumente un 40%.

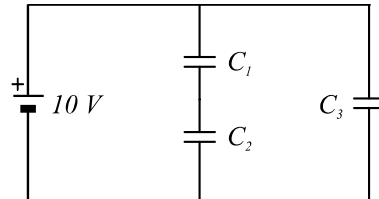
**FÍSICA (Informática de Gestión)**  
**1ª Prueba Presencial, 2ª Semana**  
**Febrero de 2005**  
**SOLUCIONES**

**PROBLEMA 1.2.1**

El circuito que muestra la figura P1.2.1, está formado por un sistema de condensadores conectados a una pila de 10 V.

1) Calcular la carga en cada condensador. 2) Calcular la energía electrostática almacenada en los tres condensadores.

$C_1 = C_2 = 4 \mu\text{F} = 4 \times 10^{-6} \text{ F}$ .  $C_3 = 2 \mu\text{F} = 2 \times 10^{-6} \text{ F}$ .  $C_1$  y  $C_2$  están en serie.



**Figura P1.2.1**

**Solución**

Para calcular las respectivas cargas debemos tener en cuenta la disposición de los respectivos condensadores.

$C_1$  está en serie con  $C_2$ , por tanto tiene la misma carga,  $Q_1 = Q_2$ . Al conjunto en serie se aplica una tensión de 10 voltios (V). Al condensador  $C_3$  se le aplica una tensión de 10 V.

Utilizamos la relación  $C = Q/V$  para obtener los distintos valores.

1) *Carga*

*Condensadores en serie:*

$$10 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$

Como  $Q_1 = Q_2$  y  $C_1 = C_2 = 4 \times 10^{-6}$

$$10 = \frac{2Q_1}{4 \times 10^{-6}} \rightarrow Q_1 = Q_2 = 20 \times 10^{-6} \text{ C}$$

*Condensador  $C_3$*

$$10 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{Q_3}{2 \times 10^{-6}} \rightarrow Q_3 = 20 \times 10^{-6} \text{ C}$$

2) *Energía*

La energía total  $W$  es la suma de las energías almacenadas en los distintos condensadores.

Teniendo en cuenta la Ec. (4.16), apartado 4.3.3, página 160 del libro *Física para informática* de V. López y M<sup>a</sup>. M. Montoya.

$$W_1 = \frac{1}{2}Q_1V_1 \ ; \ W_2 = \frac{1}{2}Q_2V_2 \ ; \ W_3 = \frac{1}{2}Q_3V_3$$

Las cargas se han calculado en el apartado anterior; nos queda por calcular  $V_1$  y  $V_2$ , ya que  $V_3 = 10 \text{ V}$ .

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{20 \times 10^{-6}}{4 \times 10^{-6}} = 5 \text{ V} \ ; \ V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{20 \times 10^{-6}}{4 \times 10^{-6}} = 5 \text{ V}$$

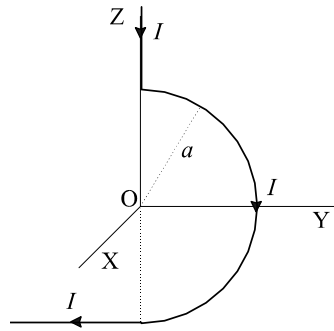
La energía total será,

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{1}{2} \left( 5 \times 20 \times 10^{-6} + 5 \times 20 \times 10^{-6} + 10 \times 20 \times 10^{-6} \right) \text{ J}$$

$$W = 2 \times 10^{-4} \text{ J}$$

### PROBLEMA 1.2.2

Un sistema de conductores está formado por tramos rectos y una semicircunferencia. Dichos tramos se disponen como muestra la figura P1.2.2. Por ellos circula una corriente  $I$  en los sentidos indicados. Calcular el campo magnético  $\mathbf{B}$  creado en el origen de coordenadas  $O$ .



**Figura P1.2.2**

### Solución

Calculamos el campo magnético debido a los distintos tramos.

1) *Tramos recto sobre el eje Z*

En este tramo  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  es paralelo a  $d\mathbf{l}$  por tanto  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times d\mathbf{l} = 0$

$$\mathbf{B}_1 = 0$$

2) *Tramo recto paralelo al eje Y*

Este tramo está sobre una recta paralela al eje Y a una distancia  $a$  del punto  $O$

Aplicamos los resultados del ejemplo 6.1, página 221 del libro citado anteriormente. Aquí, dada la disposición del tramo y el sentido de la corriente, el resultado de aplicar la regla del tornillo nos lleva a que  $\mathbf{u}_\varphi = -\mathbf{u}_x$ ; los límites de integración, dado que el tramo comienza en  $\alpha = 0$ , serán 0 y  $\pi/2$ .

$$\mathbf{B}_2 = -\mathbf{u}_x \frac{\mu_o I}{4\pi a} [\sin \alpha]_0^{\pi/2} = -\mathbf{u}_x \frac{\mu_o I}{4\pi a}$$

3) *Tramo circular*

En este caso se aplican los resultado del ejemplo 6.2, página 223 del libro citado.

En este caso el eje Z se cambia por el X, y teniendo en cuenta la regla del tornillo,  $\mathbf{u}_z$  se cambia por  $-\mathbf{u}_x$ . Los límites de integración son 0 y  $\pi$ , ya que se trata de una semicircunferencia.

$$\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_0^\pi \frac{I a^2 d\varphi (-\mathbf{u}_x)}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Como la circunferencia está en el plano YZ,  $x = 0$ . Calculando la integral anterior tenemos que,

$$\mathbf{B}_3 = -\mu_o \frac{I}{4a} \mathbf{u}_x$$

El campo magnético en el origen O es la suma de los anteriores,

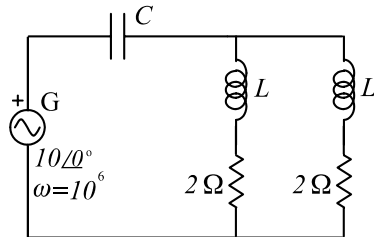
$$\mathbf{B}_T = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 = -\mathbf{u}_x \frac{\mu_o I}{4a} \left( 1 + \frac{1}{\pi} \right)$$

$$\mathbf{B}_T = -\mathbf{u}_x \frac{\mu_o I}{4a} \left( \frac{\pi + 1}{\pi} \right)$$

### PROBLEMA 1.2.3

La figura P1.2.3 muestra un circuito de corriente alterna (c. a.). El generador G suministra una tensión alterna de frecuencia  $\omega = 10^6 \text{ s}^{-1}$ ,  $\mathbf{V} = 10\angle 0$  voltios. Calcular el módulo y la fase de la corriente que sale del generador.

$C = 0,5 \mu\text{F} = 5 \times 10^{-7} \text{ F}$ .  $L = 2 \mu\text{H} = 2 \times 10^{-6} \text{ H}$ .



**Figura P1.2.3**

### Solución

Para obtener la corriente suministrada por el generador comenzamos por calcular  $X_C$  y  $X_L$ .

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{10^6 \times 5 \times 10^{-7}} = -2 \quad ; \quad X_L = \omega L = 10^6 \times 2 \times 10^{-6} = 2$$

Las impedancias de cada tramo son respectivamente,

$$\mathbf{Z}_1 = jX_C = -j2$$

$$\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3 = 2 + j2 = 2(1 + j)$$

Como  $\mathbf{Z}_2$  y  $\mathbf{Z}_3$  están en paralelo,

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_e} = \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \frac{1}{\mathbf{Z}_3} = \frac{2}{2(1 + j)} = \frac{1}{(1 + j)}$$

Es decir,

$$\mathbf{Z}_e = 1 + j$$

La impedancia  $\mathbf{Z}_1$  esta en serie con  $\mathbf{Z}_e$  y con el generador, por tanto,

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_e = -j2 + (1 + j) = 1 - j$$

Calculamos la corriente que suministra el generador dividiendo la tensión del generador por  $\mathbf{Z}_T$ .

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{10}{1 - j} = \frac{10(1 + j)}{1^2 - (j)^2} = 5(1 + j)$$

Módulo y fase de la corriente.

$$|\mathbf{I}| = I = 5\sqrt{2} \quad ; \quad \theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$